数理解析研究所講究録
945 巻 1996 年 93-103

無限ネットワークの分類

広島工大　村上温(Atsushi Murakami)
島根大学　山崎稀嗣（Maretsugu Yamasaki）

1. 準備

X を**点**(node)の高々可算集合，Y を**線**(arc)の高々可算集合，K を点と線の**接続行列**,つまり

$$K : X \times Y \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$$

とするとき，これらの組 $G := \{X, Y, K\}$ を**グラフ**という．X と Y が共に有限集合の場合に G を有限グラフ，それ以外の場合には G を**無限グラフ**という．線 $y \in Y$ の端点 $e(y) := \{x \in X; K(x,y) \neq 0\}$ は異なる２点 $x^-(y)$ (始点) と $x^+(y)$ (終点)から成り, それらは条件：

$$K(x^+(y), y) = 1, \quad K(x^-(y), y) = -1$$

により定まる(セルフループをもたない)と仮定する．

以下では，G の任意の２点を結ぶパスが存在すること（**連結性**）を仮定する．説明を省略した用語については [5] を参照．

グラフ G と Y 上の正の実数値関数（抵抗）r の組 $N := \{G, r\} = \{X, Y, K, r\}$ を**ネットワーク**という．G が有限グラフのとき N を有限ネットワーク，G が無限グラフのとき N を**無限ネットワーク**という．

点 $a \in X$ に接続する線の集合を $Y(a) = \{y \in Y; K(a,y) \neq 0\}$，$a$ の隣接点の集合を $X(a)$,線 $y \in Y$ の両端点の集合を $e(y)$ で表す．$Y(x)$ が全ての x について有限集合である場合に，N は**局所有限**であるという．集合 A の要素の個数を $|A|$ で表す．互いに素な空でない X の空でない部分集合 A, B に対し，A と B を結ぶ線 $y \in Y$ の集合を記号 $A \ominus B$ で表す．

N が局所有限でない場合には無限個の線が接続する点の集合 X_∞ は空ではない．更に詳しく言えば，次の集合のいずれかは空ではないことに注意する：

$$\begin{aligned} X_\infty^{(1)} &:= \{a \in X; |X(a)| = \infty\}, \\ X_\infty^{(11)} &:= \{a \in X_\infty^{(1)}; \text{全ての } x \in X(a) \text{ に対し} \{a\} \ominus \{x\} \text{は有限集合}\}, \\ X_\infty^{(12)} &:= X_\infty^{(1)} \setminus X_\infty^{(11)}, \\ X_\infty^{(2)} &:= \{a \in X; |X(a)| < \infty, |Y(a)| = \infty\}. \end{aligned}$$

各点 $a \in X_\infty$ が条件：

$$(*) \qquad \sum_{y \in Y(a)} r(y)^{-1} < \infty$$

を満たすとき，N を**殆ど局所有限**なネットワークと呼ぶ（文献[3],[5]）

この論文の目的は，局所有限なネットワークや殆ど局所有限なネットワークの分類([4],[6]参照)に有用であった4つの計量の関係を調べることにより，一般なネットワークの分類を試みることである．

X 上の実数値関数の全体を $L(X)$ とする．関数 $u \in L(X)$ の台を $Su := \{x \in X; u(x) \neq 0\}$ とし，台が有限集合であるような X 上の実数値関数の全体を $L_0(X)$ で表す．
記号 $L(Y), L_0(Y)$ の意味も同様．Y 上の非負実数値関数の全体を $L^+(Y)$ とする．

関数 $w \in L(Y)$ の**エネルギー**を

$$H(w) := \sum_{y \in Y} r(y) w(y)^2$$

により定義する．エネルギー有限な $w \in L(Y)$ の集合 $L_2(Y; r)$ は内積

$$H(w, w') := \sum_{y \in Y} r(y) w(y) w'(y)$$

に関してヒルベルト空間となる．

関数 $u \in L(X)$ の**離散微分**（差分）du と**ディリクレ和** $D(u)$ を

$$\begin{aligned} du(y) &:= -r(y)^{-1} \sum_{x \in X} K(x, y) u(x) \\ D(u) &:= \sum_{y \in Y} r(y) [du(y)]^2 = H(du) \end{aligned}$$

と定義する．ディリクレ和が有限な X 上の関数の全体を $D(N)$ で表す．関数$u, v \in D(N)$ の相互ディリクレ和を

$$D(u, v) := \sum_{y \in Y} r(y) [du(y)][dv(y)] = H(du, dv)$$

と定義する．$D(N)$ は内積：

$$< u, v >:= D(u, v) + u(x_0) v(x_0)$$

($x_0 \in X$ は固定）に関してヒルベルト空間となる．

以下で，点 $a \in X$ と N の無限遠点 ∞ とに関係した4つの計量を考える：

1．点 a に関する**無限遠点の容量**：

$$d(a, \infty) := \inf\{D(u); u \in L_0(X), u(a) = 1\}. \tag{1.1}$$

2．点 a と無限遠点との間の**極値的長さ**：

点 a から無限遠点への N 上の**パス** P とは，点の集合 $C_X(P)$ と線の集合 $C_Y(P)$ 及び Y 上の関数 p (パス関数)の組で次の条件を満たすものとして定義する：

$$\begin{aligned} C_X(P) &= \{x_k; k = 0, 1, 2, \cdots\}, x_j \neq x_k \ (j \neq k) \\ C_Y(P) &= \{y_k; k = 1, 2, \cdots\}, y_j \neq y_k \ (j \neq k) \\ e(y_k) &= \{x_{k-1}, x_k\} \ (k = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

$$p(y) := \begin{cases} -K(x_{k-1}, y_k), & y = y_k \text{ のとき;} \\ 0, & y \in Y \setminus C_Y(P) \text{ のとき.} \end{cases}$$

点 a から無限遠点への N 上のパスの全体を $P_{a,\infty} = P_{a,\infty}(N)$ とする.

$$EL(a,\infty)^{-1} := \inf\{H(W); W \in EL(P_{a,\infty})\}, \tag{1.2}$$

ただし，$EL(P_{a,\infty})$ は，すべてのパス $P \in P_{a,\infty}$ に対して

$$\sum\nolimits_{y \in P} r(y)W(y) \geq 1$$

を満たす $W \in L^+(Y)$ の集合を表す.
$P_{a,\infty}$ が空集合の場合には，$0 \in EL(P_{a,\infty})$ より，$EL(P_{a,\infty}) = \infty$.

3．点 a から無限遠点への単位フローの最小エネルギー:
点 $a \in X$ から無限遠点への**フロー**とは，次の条件を満たす関数 $w \in L(Y)$ のことである：
(F.1) すべての $x \in X_\infty$ について $Sw \cap Y(x)$ は有限集合, ただし，$Sw := \{y \in Y; w(y) \neq 0\}$ は w の台.
(F.2) 点 a 以外ではキルヒホッフの第一法則を満たす：

$$\sum\nolimits_{y \in Y} K(x,y)w(y) = 0 \qquad \forall x \neq a$$

点 $a \in X$ から無限遠点へのフローの全体を $F_0(a,\infty)$ とする．$w \in F_0(a,\infty)$ に対し

$$I(w) := \sum\nolimits_{y \in Y} K(a,y)w(y)$$

を w の強さという.

$$d^*(a,\infty) := \inf\{H(w); w \in F_0(a,\infty), I(w) = 1\} \tag{1.3}$$

$\{w \in F_0(a,\infty); I(w) = 1\}$ が空集合の場合には，$d^*(a,\infty) = \infty$ と約束する.

4．点 a と無限遠点の間の**極値的幅**：
点 a と無限遠点の間の**切断**(カット) Q とは X を互いに共通点を持たない部分集合 $Q(a)$ ($Q(a)$ は a を含む有限集合） と $Q(\infty)$ に分割したとき生じる線の集合 $Q = Q(a) \ominus Q(\infty)$) を意味する．点 a と無限遠点の間の切断の全体を $Q_{a,\infty}$ とする.

$$EW(a,\infty)^{-1} := \inf\{H(W); W \in EW(Q_{a,\infty})\}, \tag{1.4}$$

ただし，$EW(Q_{a,\infty})$ は，すべての切断（カット）$Q \in Q_{a,\infty}$ に対して

$$\sum\nolimits_{y \in Q} W(y) \geq 1$$

を満たす $W \in L^+(Y)$ の集合を表す.

N が殆ど局所有限である場合には, $d(a,\infty)$ と $EL(a,\infty)$; $d^*(a,\infty)$ と $EW(a,\infty)$; $EL(a,\infty)$ と $EW(a,\infty)$ のいずれの組も逆数関係があることが知られている ([2]).

2. **計量の一般的な関係**

この節では点 $a \in X$ を固定する：

Lemma 2.1. $u \in L_0(X)$, $w \in F_0(a,\infty)$ が条件：$u(a) = 1$, $I(w) = 1$ を満たせば, $1 \le H(w)D(u)$ が成り立つ.

証明. u と w に関する仮定から

$$1 = \sum_{y\in Y} K(a,y)w(y) = \sum_{x\in X} u(x) \sum_{y\in Y} K(x,y)w(y).$$

この2重和は有限和であるから, 和の順序を取り替えてシュワルツの不等式を使えば

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{y\in Y} w(y) \sum_{x\in X} K(x,y)u(x) \\ &\le [H(w)]^{1/2}[D(u)]^{1/2} \quad \square \end{aligned}$$

このことを用いて次の結果を得る：

Theorem 2.2. $1 \le d(a,\infty)d^*(a,\infty)$.

Theorem 2.3. $EL(a,\infty)^{-1} \le d(a,\infty)$.

証明. $d(a,\infty)$ の実行可能解 u に対して $W :=\mid du \mid$ と選べば, W は $EL(a,\infty)^{-1}$ の実行可能解であることが示され, $H(W) = D(u)$ が成り立つことから求める不等式を得る. □

Theorem 2.4. $EW(a,\infty)^{-1} \le d^*(a,\infty)$.

証明. $w \in F_0(a,\infty), I(w) = 1$, $Q = Q(a) \ominus Q(\infty) \in Q_{a,\infty}$ とし, $Q(a)$ の特性関数を u とする. 補助定理 2.1 により,

$$\begin{aligned} I(w) &= \sum_{x\in X} u(x) \sum_{y\in Y} K(x,y)w(y) \\ &= \sum_{y\in Y} w(y) \sum_{x\in X} K(x,y)u(x) \end{aligned}$$

従って

$$1 \le \sum_{y\in Q} \mid w(y) \mid$$

すなわち, $W(y) :=\mid w(y) \mid$ は $EW(a,\infty)^{-1}$ の実行可能解である. 従って,

$$EW(a,\infty)^{-1} \le H(W) = H(w)$$

これから, 求める不等式が得られる. □

Theorem 2.5. 次の関係式が成り立つ：

$$EL(a,\infty) \le d^*(a,\infty) \tag{2.1}$$

証明. $d^*(a,\infty)$ が有限であると仮定してよい. 任意の正数 ϵ に対して

$$d^*(a,\infty) + \epsilon > H(w), w \in F_0(a,\infty), I(w) = 1$$

を満たす w が存在する．$e(Sw) := \cup\{e(y); y \in Sw\}$ の連結成分で a を含むものを X', Sw の元で X' に両端点をもつものを Y' とすると, $N' =< X', Y' >$ は局所有限な無限ネットワーク である。このとき，w を Y' に制限すると，これは $d^*(a,\infty;N')$ に対する実行可能解となる．従って

$$d^*(a,\infty)+\epsilon > H(w) \geq \sum_{y\in Y'} r(y)w(y)^2 \geq d^*(a,\infty;N')$$

他方，局所有限なネットワーク上での関係式と極値的長さの一般的な関係から

$$EL(a,\infty) \leq EL(a,\infty;N') = d^*(a,\infty;N')$$

が成り立つ．従って

$$d^*(a,\infty)+\epsilon > EL(a,\infty).$$

ϵ は任意であるから求める不等式が証明された． □

局所有限な無限ネットワークの場合と同様にして次の結果を証明できる：([1] 参照)

Theorem 2.6. $EL(a,\infty)=\infty$ が成り立つための必要十分条件は

$$\sum_{y\in P} r(y)W(y) = \infty \quad \forall P \in P_{a,\infty} \tag{2.2}$$

を満たす $W \in L^+(Y) \cap L_2(Y;r)$ が存在すること．

Theorem 2.7. $EW(a,\infty)=\infty$ が成り立つための必要十分条件は

$$\sum_{y\in Q} W(y) = \infty \quad \forall Q \in Q_{a,\infty} \tag{2.3}$$

を満たす $W \in L^+(Y) \cap L_2(Y;r)$ が存在すること．

3. 局所有限でない特性

Theorem 3.1. $d(a,\infty)=\infty$ となるための必要条件は

$$\sum_{y\in Y(a)} r(y)^{-1} = \infty \tag{3.1}$$

が成り立つこと．

証明. ϵ_a は点 a の特性関数とする．関係式

$$d(a,\infty) \leq D(\epsilon_a) = \sum_{y\in Y(a)} r(y)^{-1}$$

から条件の必要性が分かる． □

Theorem 3.2. $a \in X_\infty^{(11)}$ とする．(3.1) が成り立てば $d(a,\infty)=\infty$ となる．

証明. 条件 (3.1) を仮定する．$d(a,\infty)$ の実行可能解 u について，$u(a)=1$, $u \in L_0(X)$ かつ $a \in X_\infty^{(11)}$ より

$$Y_0(a) := \{y \in Y(a); e(y) \setminus Su \neq \emptyset\}$$

は有限集合であるから

$$D(u) \geq \sum_{y\in Y(a)-Y_0(a)} r(y)^{-1} = \infty. \quad \square$$

Theorem 3.3. 任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ に対して

$$EW(a,\infty) \leq \sum_{y\in Q} r(y)^{-1} \tag{3.2}$$

証明. $EW(a,\infty)$ の実行可能解 W に対して

$$1 \leq \sum_{y\in Q} W(y) \leq [\sum_{y\in Q} r(y)^{-1}]^{1/2}[H(W)]^{1/2}$$

すなわち

$$1 \leq [\sum_{y\in Q} r(y)^{-1}]EW(a,\infty)^{-1}$$

これから，求める不等式が得られる． □

Lemma 3.4. 任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ とパス $P \in P_{a,\infty}$ は交わる．すなわち $C_Y(P) \cap Q \neq \emptyset$.

証明. Q を定める集合 $Q(a)$ の特性関数を $u_Q \in L(X)$, P の パス関数を $p \in L(Y)$ とする．$Q(a)$ 上で $u_Q = 1$，$Q(\infty)$ 上で $u_Q = 0$ であるから $u_Q \in L_0(X)$. $p \in F_0(a,\infty)$ であるから Lemma 2.1 により

$$\begin{aligned} -1 = \sum_{y\in Y} K(a,y)p(y) &= \sum_{x\in X} u_Q(x) \sum_{y\in Y} K(x,y)p(y) \\ &= \sum_{y\in Y} p(y) \sum_{y\in Y} K(x,y)u_Q(x) \end{aligned}$$

従って,

$$1 \leq \sum_{y\in Q} | p(y) |$$

ゆえに，$Sp \cap Q \neq \emptyset$. 言い換えれば $C_Y(P) \cap Q \neq \emptyset$. □

Theorem 3.5. 任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ に対して

$$[\sum_{y\in Q} r(y)^{-1}]^{-1} \leq EL(a,\infty) \tag{3.3}$$

証明. $\sum_{y\in Q} r(y)^{-1} = \infty$ のときは，(3.3) は明らか．そうでないときを考える．$y \in Q$ のとき $W(y) = r(y)^{-1}$, $y \in Y - Q$ のとき $W(y) = 0$ で定義された関数 W を考える．Lemma 3.4 により,任意の $P \in P_{a,\infty}$ に対して

$$1 \leq \sum_{y\in C_Y(P)} r(y)W(y)$$

つまり, W は $EL(a,\infty)$ に対する実行可能解である．従って

$$EL(a,\infty)^{-1} \leq H(W) = \sum_{y\in Y} r(y)W(y)^2 = \sum_{y\in Q} r(y)^{-1}$$

□

Theorem 2.5 と Theorem 3.5 から次の結果を得る：

Theorem 3.6. 任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ に対して

$$[\sum_{y\in Q} r(y)^{-1}]^{-1} \leq d^*(a,\infty) \tag{3.4}$$

が成り立つ．特に

$$[\sum_{y\in Y(a)} r(y)^{-1}]^{-1} \leq d^*(a,\infty) \tag{3.5}$$

4. **特別な場合**

Theorem 4.1. $EW(a,\infty)=\infty$ ならば，任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ に対して

$$\sum_{y\in Q} r(y)^{-1} = \infty \tag{4.1}$$

従って，条件 (3.1) が成り立つ．

証明. Theorem 2.7 により条件 (2.3) を満たす $W \in L^+(Y)\cap L_2(Y;r)$ が存在する．任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ に対し

$$\infty = \sum_{y\in Q} W(y) \leq [\sum_{y\in Q} r(y)^{-1}]^{1/2}[H(W)]^{1/2}$$

$H(W)$ は有限であるから，(4.1) が成り立つ． □

Theorem 4.2. $a \in X_\infty^{(11)}$とする．集合 $\{r(y); y \in Y(a)\}$ が有界ならば，$d(a,\infty) = EW(a,\infty)=\infty$ が成り立つ．

証明. $Y(a)=\{y_n; n=1,2,\cdots\}$ とする．仮定より

$$M = \sup\{r(y_n); n=1,2,\cdots\} < \infty.$$

各 n に対し $W(y_n)=1/n$, $y \in Y\setminus Y(a)$ に対し $W(y)=0$ で定義される関数 W を考える．任意のカット $Q \in Q_{a,\infty}$ に対し，$Q(a)$ は有限集合であるから，Q は ある番号から先の$Y(a)$ の要素をすべて含む．従って，条件 (2.3) が満たされる．更に

$$H(W) = \sum_{y\in Y(a)} r(y)W(y)^2 \leq M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

ゆえに，Theorem 2.7 により $EW(a,\infty)=\infty$. □

注意. 上の定理の証明は $Y(a)=\{y_n; n=1,2,\cdots\}$ について，条件

$$r(y_n) \leq Mn^\alpha \qquad (0 \leq \alpha < 1)$$

が成り立つときにも有効である．

Theorem 4.3. $d(a,\infty)<\infty$ とする．条件：

$$\sum_Q r(y)^{-1} < \infty \quad \forall Q \in Q_{a,\infty}$$

が満たされれば，$d(a,\infty) \leq EW(a,\infty)$.

証明. $d(a,\infty)>0$ の場合に証明すればよい．

$$D(N;a) := \{u \in D(N); u(a)=1\}$$

は内積 $D(u,v)$ をもつヒルベルト空間であるから，$d(a,\infty)=D(\tilde{u})$ を満たす $\tilde{u}\in D(N;a)$ の存在が分かる．カット $Q\in Q_{a,\infty}$ を定義する集合 $Q(a)$ の特性関数を u_Q とすると，

$$u_Q \in L_0(X), \quad D(u_Q)=\sum\nolimits_Q r(y)^{-1}<\infty.$$

従って，最小解 $\tilde{u}$ の性質から

$$0=D(\tilde{u},\tilde{u}-u_Q)$$

が導かれる．ゆえに, $\tilde{W}(y):=\mid d\tilde{u}(y)\mid$ として，

$$d:=d(a,\infty)=D(\tilde{u},u_Q)\leq\sum\nolimits_Q \tilde{W}(y).$$

すなわち，$\tilde{W}/d$ は $EW(a,\infty)$ の実行可能解である．ゆえに

$$EW(a,\infty)^{-1}\leq H(\tilde{W}/d)=D(\tilde{u})/d^2=1/d.$$

□

5. Examples

以下では具体的な無限グラフと抵抗の例を列挙し４つの計量の関係を明らかにする．グラフ $G=\{X,Y,K\}$ の定義では点の集合 X, 線の集合 Y と結合関数 K を与える．$\mathbf{N}$ は自然数全体の集合を表すものとする．

1. 全ての $x\in X$ について，$P_{x,\infty}=\emptyset$，$\{w\in F_0(x,\infty);I(w)=1\}=\emptyset$ である無限グラフ：

Graph 5.1. $X=\{x_n;n\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$, $Y=Y(x_0)=\{y_n;n\in\mathbf{N}\}$,

$$K(x_0,y_n)=-1, \quad K(x_n,y_n)=1 \qquad (\forall n\in\mathbf{N})$$

その他の場合には，$K(x,y)=0$.

Graph 5.2. $X=\{x_0,x_1\}$, $Y=\{y_n;n\in\mathbf{N}\}$,

$$K(x_0,y_n)=-1, \quad K(x_1,y_n)=1 \qquad (\forall n\in\mathbf{N})$$

その他の場合には，$K(x,y)=0$.

Graph 5.2*. $X=\{x_0,x_1,x_{-1}\}$, $Y=\{y_0\}\cup\{y_n;n\in\mathbf{N}\}$,

$$K(x_0,y_n)=-1, \quad K(x_1,y_n)=1 \qquad (\forall n\in\mathbf{N});$$

$$K(x_{-1},y_0)=-1,\ K(x_0,y_0)=1$$

その他の場合には，$K(x,y)=0$.

2. 全ての $x\in X$ に対して，$P_{x,\infty}\neq\emptyset$ となる無限グラフ：

Graph 5.3. $X = \{x_n, x'_n; n \in \mathbf{N}\} \cup \{x'_0\}(x_0 = x'_0$ とする$)$, $Y = \{y_n, y'_n; n \in \mathbf{N}\}$

$$K(x'_0, y'_n) = K(x'_0, y_1) = K(x_{n-1}, y_n) = -1$$

$$K(x'_n, y'_n) = K(x_n, y_n) = 1 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

その他の場合には，$K(x, y) = 0$.

Graph 5.4. $X = \{x'_0\} \cup \{x_n; n \in \mathbf{N}\}$, $Y = \{y_n, y'_n; n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$,

$$K(x'_0, y'_n) = K(x_n, y_n) = -1,\ K(x_n, y'_n) = K(x_{n+1}, y_n) = 1\ (\forall n \in \mathbf{N})$$

その他の場合には，$K(x, y) = 0$.

Graph 5.5. $X = \{x_0\} \cup \{x_n^{(k)}; n, k \in \mathbf{N}\}$, $Y = \{y_n^{(k)}; n, k \in \mathbf{N}\}$, $x_n^{(0)} = x_0$,

$$K(x_n^{(k-1)}, y_n^{(k)}) = -1,\ K(x_n^{(k)}, y_n^{(k)}) = 1\ (\forall n \in \mathbf{N})$$

その他の場合には，$K(x, y) = 0$.

Example 5.6. G はGraph 5.1, $r = 1$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える. $a = x_0$ とするとき，

$$EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \infty.$$

は自明. Theorem 3.2 と Theorem 4.2 から

$$d(a, \infty) = EW(a, \infty) = \infty.$$

Example 5.7. G はGraph 5.1, $r(y_n) = n^2$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える. $a = x_0$ とするとき，

$$EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \infty.$$

は自明. Theorem 3.3 と Theorem 4.3 を利用することにより

$$d(a, \infty) = EW(a, \infty) = 0.$$

Example 5.8. G はGraph 5.2, $r = 1$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える. $a = x_0$ とするとき

$$d(a, \infty) = 0, \quad EW(a, \infty) = EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \infty.$$

$EW(a, \infty) = \infty$ の証明は，$Q_{a,\infty} = \{Y(a)\}$ だから，$W(y_n) = 1/n$ として，Theorem 2.7 を使う.

Example 5.9. G はGraph 5.2*, $r = 1$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える. $a = x_0$ とするとき

$$d(a, \infty) = 0 < 1 = EW(a, \infty) < \infty = EL(a, \infty) = d^*(a, \infty) = \infty.$$

Example 5.10. G はGraph 5.3, $r=1$ としてネットワーク $N=\{G,r\}$ を考える. $a=x_0'$ とするとき

$$d(a,\infty)=EW(a,\infty)=EL(a,\infty)=d^*(a,\infty)=\infty.$$

Example 5.11. G は Graph 5.3, $a=x_0'$, $r(y_n')=1$ $(n\in\mathbf{N})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(y_n)<\infty$$

としてネットワーク $N=\{G,r\}$ を考える. このとき,

$$EL(a,\infty)=d^*(a,\infty)=\sum_{n=1}^{\infty} r(y_n)<\infty=d(a,\infty)=EW(a,\infty).$$

Example 5.12. G はGraph 5.4, $r=1$ としてネットワーク $N=\{G,r\}$ を考える. $a=x_0'$ とするとき,

$$d(a,\infty)=EW(a,\infty)=EL(a,\infty)=d^*(a,\infty)=\infty.$$

$EL(a,\infty)=\infty$ の証明は, $W(y_n)=1/n, W(y_n')=0$ $(n\in\mathbf{N})$ としてTheorem 2.6 を適用すればよい. Theorem 2.5 により $d^*(a,\infty)=\infty$ が分かる. $d(a,\infty)$ と $EW(a,\infty)$ の計算は Theorem 3.2 と Theorem 4.2 から分かる.

Example 5.13. G は Graph 5.4, $a=x_0'$, $r(y_n')=1$ $(n\in\mathbf{N})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(y_n)<\infty$$

としてネットワーク $N=\{G,r\}$ を考える. このとき

$$d^*(a,\infty)=EL(a,\infty)=0<\infty=d(a,\infty)=EW(a,\infty).$$

$d^*(a,\infty)=0$ を証明するために, 次式で定義される関数列 $w_n\in L(Y)$ を考える：

$$w_n(y_k')=\begin{cases}1/n, & \text{if } n+1\le k\le 2n;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

$$w_n(y_k)=\begin{cases}0, & \text{if } 1\le k\le n;\\ (k-n)/n, & \text{if } n+1\le k\le 2n;\\ 1, & \text{if } k\ge 2n.\end{cases}$$

このとき, $w_n\in F_0(a,\infty)$ かつ $I(w_n)=1$, さらに

$$d^*(a,\infty)\le H(w_n)=n\frac{1}{n^2}+\sum_{k=n+1}^{2n} r(y_k)w_n(y_k)^2+\sum_{k=2n+1}^{\infty} r(y_k)$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} r(y_k)w_n(y_k)^2<\sum_{k=n+1}^{2n} r(y_k)$$

であることから $n \to \infty$ のとき $H(w_n) \to 0$ が導かれるので，$d^*(a,\infty) = 0$.

Example 5.14. G は Graph 5.5, $a = x_0$, $r(y_n^{(k)}) = 1/k^2$ $(n, k \in \mathbf{N})$ としてネットワーク $N = \{G, r\}$ を考える．このとき，$d(a,\infty) = EW(a,\infty) = \infty$,

$$d^*(a,\infty) = EL(a,\infty) = 0$$

次式で定義される関数列 $w_m \in L(Y)$ を考える：

$$w_m(y_n^{(k)}) = \begin{cases} 1/m, & \text{if } 1 \le n \le m,\ \ k \in \mathbf{N}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき $w_m \in F_0(a,\infty)$ かつ $I(w_m) = 1$, さらに

$$d^*(a,\infty) \le H(w_m) = m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$m \to \infty$ とすることにより，$d^*(a,\infty) = 0$. この現象は Example 5.13 と同じである．

参考文献

[1] T. Kayano and M. Yamasaki, Boundary limit of discrete Dirichlet potentials, Hiroshima Math. J. 14(1984), 401-406.

[2] T. Nakamura and M. Yamasaki, Extremal length of an infinite network which is not necessarily locally finite, Hiroshima Math. J. 7(1977), 813-826.

[3] P. Soardi, Potential theory on infinite networks, Lecture Notes in Mathematics 1590, Springer-Verlag, 1994.

[4] P. Soardi and M. Yamasaki, Classification of infinite networks and its application, Cicuits Systems Signal Process 12(1993), 133-149

[5] M. Yamasaki, Extremum problems on an infinite network, Hiroshima Math. J. 5(1975), 223-250.

[6] M. Yamasaki, Parabolic and hyperbolic infinite networks, Hiroshima Math. J. 7(1977), 135-146.